

유량 횡분배법의 해석해

Analytical solution for lateral distribution method

김승기* · 최성욱** · 최성욱***

Kim, Seung Ki · Choi, Seong-Wook · Choi, Sung-Uk

1. 서론

일반적인 하천의 단면 형태는 주수로 (main channel)과 홍수터 (flood plain)으로 나누어져 평상시에는 주수로에만 하천수가 흐르나 홍수시 수위가 증가하여 홍수터까지 흐르게 하여 하천수가 넘쳐흐르는 것을 막는다. 하도의 조도나 식생의 유무에 따라 주수로와 홍수터의 흐름저항이 변화하여 동일한 유량에 대하여 각 구간에 발생하는 유속이 변화하고 이에 따라 수위가 변화하며 토사의 퇴적 및 침식에 영향을 끼치게 된다. 따라서 평수기에는 충분한 수위를 확보하면서 홍수시의 수위조절, 하도의 안정을 위하여 단면의 구간별 유속을 알아야 하는 것은 필수적이다.

하도의 저항과 토사의 퇴적 및 침식에 큰 영향을 끼치는 요소는 하상전단응력으로 이는 또한 수심적분유속에 큰 영향을 받는다. 만곡이 크지 않은 하도에서 이차류의 크기는 주 흐름방향 흐름에 비해 매우 작기 때문에 주 흐름방향의 수심적분유속에 대한 횡방향 분포를 아는 것이 매우 중요하다고 할 수 있다.

본 연구에서는 유량 횡분배법 (Lateral Distribution Method)의 유속과 하상전단응력에 대한 해석해를 구하고 이를 Shiono and Knight (1991)에 제시된 SERC-Flood Channel Facility의 실험자료에 적용하여 적용성을 검증하였다. 또한 국내 하천 한강에 적용하여 주 흐름방향 유속과 전단응력의 횡방향 분포를 구하고 이에 대하여 고찰하였다.

2. 이론적 배경

2.1 지배방정식

Shiono and Knight (1991)은 시간평균된 Navier-Stokes 방정식을 등류의 가정 하에 수심 적분하여 다음의 식을 제시하였다.

$$\rho g H S_x - \tau_b B_g + \frac{\partial}{\partial y} [H(\tau_{xy})_d] = \Gamma \quad (1)$$

여기서 ρ 는 물의 밀도, g 는 중력가속도, H 는 수심, S_x 는 주 흐름방향 하상경사, τ_b 는 하상 전단응력, B_g 는 지형 형상 계수 ($= \sqrt{1 + S_x^2 + S_y^2}$), S_y 는 횡방향 하상경사, $(\tau_{xy})_d$ 는 수심적분된 횡방향 전단응력이며 다음과 같다.

$$(\tau_{xy})_d = \lambda U_* H \quad (2)$$

* 연세대학교 대학원 토목환경공학과 석사과정 · E-mail: seunggi@yonsei.ac.kr

** 연세대학교 대학원 토목환경공학과 박사과정 · E-mail: csu1220@hotmail.com

*** 정회원 · 연세대학교 공과대학 토목환경공학과 교수 · E-mail: schoi@yonsei.ac.kr - 발표자

여기서 λ 는 무차원 와점성 계수, U_* 는 전단속도 ($= \sqrt{\tau_b/\rho}$)이다. 여기서 Darcy-Weishbach의 마찰계수식 ($f = 8\tau_b/(\rho U_d^2)$)을 이용하여 전단속도 U_* 를 식 (3)과 같이 나타낼 수 있으며, 전단속도를 식 (2)에 대입하여 수심적분된 횡방향 전단응력을 나타내면 식 (4)와 같다

$$U_* = \left(\frac{1}{8}f\right)^{1/2} U_d \quad (3)$$

$$(\tau_{xy})_d = \lambda H \left(\frac{1}{8}f\right)^{1/2} U_d \quad (4)$$

이차류에 의한 응력항 Γ 는 다음과 같다.

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial y} (H\rho \overline{UV})_d \quad (5)$$

여기서 $\overline{U}, \overline{V}$ 는 각각 시간 평균된 흐름방향 및 횡방향 유속을 나타낸다.

2.2 해석해

Shiono and Knight (1991)은 이차류의 영향이 고려된 수심 적분된 레이놀즈 방정식의 해석해를 일정한 수심을 가지는 구간과 횡방향 하상경사가 존재하는 구간에 대해 각각 다음의 식을 제시하였다.

일정한 수심을 가지는 경우,

$$U_d = \left\{ A_1 e^{\gamma y} + A_2 e^{-\gamma y} + \frac{8gS_x H}{f} (1 - \beta) \right\}^{1/2} \quad (6)$$

$$\gamma = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{f}{8}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{H}, \quad \beta = \frac{f\Gamma}{8gS_x H} \quad (7)$$

횡방향 하상경사가 존재하는 경우,

$$U_d = \left\{ A_3 \xi^\alpha + A_4 \xi^{-\alpha-1} + \omega \xi + \eta \right\}^{1/2} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{s\sqrt{1+s^2}}{\lambda} \sqrt{8f} \right\}^{1/2} \\ \omega &= -\frac{\Gamma}{\frac{(1+s^2)^{1/2}}{s} \frac{f}{8} - \frac{\lambda}{s^2} \left(\frac{f}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \eta &= -\frac{\Gamma}{s(1+s^2)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\lambda} \left(\frac{f}{8}\right)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

여기서, s 는 횡방향 하상경사의 역수이다. ($s = 1/S_y$) A_1, \dots, A_4 는 미지수로써 2가지 경계조건 (유속과 횡방향 유속경사의 연속성)을 이용하여 만들어진 연립방정식을 풀어서 구한다.

2.3 계산과정

유량 횡분배법의 해석에는 단면에서 횡방향 하상경사가 달라지는 구간마다 방정식이 존재하게 된다. 따라서 한 단면에 N 개의 구간이 존재한다면 N 개의 방정식이 존재하게 되며 하상경사에 조건에 따라 (7), (8)의 식을 사용하게 된다. 여기서 하나의 방정식은 2개의 미지수를 포함하고 있으므로 총 미지수의 개수는 $2N$ 개가 된다. 따라서 해를 풀기위해 필요한 식의 개수 또한 $2N$ 개가 되어야 한다. 두 구간이 서로 접하는 경우 2개의 경계조건을 이용하여 총 $2N-2$ 개의 식을 생성할 수 있으며, 2개의 경계조건은 다음과 같다.

$$U_{d,1} = U_{d,2}|_{boundary} \quad (10)$$

$$\frac{\partial U_{d,1}}{\partial y} = \frac{\partial U_{d,2}}{\partial y}|_{boundary} \quad (11)$$

구간사이의 경계조건을 통해 만들어진 식은 $2N-2$ 개며, 미지수의 개수는 $2N$ 개 이므로 2개의 식이 더 필요하다. 나머지 2개의 식은 각 좌안과 우안의 경계조건을 통해 만들어지며, SERC-FCF의 실험수로 및 일반적인 하천의 경우 수직인 벽 조건이 아니다. 이 때 벽에서의 non-slip 조건을 사용한 경우 수학적으로 자명한 해는 존재하지 않게 된다. 이에 다음과 같은 가정이 추가된다. (Weber & Menendez, 2004)

$$U_{d,(\delta H)} = \delta U_d \quad (12)$$

여기서 δH 는 계산에 사용되는 최소한의 수심이며, δU_d 는 δH 에 대응되는 최소한의 유속이다. 실험수로의 경우 δH , δU_d 의 값은 각각 $0.001m$, $0.1m/s$ 이며 실제하천의 경우 각각 $0.1m$, $0.1m/s$ 이다. 연립방정식을 구성하기위해 유속의 제곱 값이 계산에 사용되었으며, 가우스 소거법을 이용하여 미지수 A_1, A_2, \dots, A_{2N} 을 구하였다.

3. 모형의 적용

본 연구에선 Shiono and Knight (1991)에 제시된 SERC-Flood Channel Facility (SERC-FCF)의 실험자료를 이용하였다. 수로의 제원은 흐름방향 하상경사 $S_x = 1.027 \times 10^{-3}$, 횡방향 경사 $s = 1.0$, 주수로의 폭은 $0.15m$ 이며, 홍수터의 폭은 각각 $2.25m$ 이다. 주수로에서의 수심은 $H = 0.1875m$ 이며, 유량은 $Q = 1.1142m^3/s$ 이다. 무차원 와점성계수 λ 는 주수로에서 0.068 , 홍수터에서 2.67 을 사용하였으며, 횡방향 경사가 존재하는 구간에선 0.16 을 사용하였다. Friction factor f 는 $f = 8gn^2/H^{1/3}$ 식을 이용하여 각 지점에서의 f 값을 구하였다. Manning's 조도계수 값은 $n = 0.0106$ 값을 사용하였으며, 무차원화된 이차류에 의한 응력항 $\Gamma/\rho gHS_x$ 는 주수로에서 0.15 , 홍수터에서 -0.15 값을 사용하였다. 그림 1의 (a)는 유속분포를 모의한 결과로 측정치와 비교해봤을 때 주수로에서 유속의 크기가 작게 계산되고 홍수터에서 유속의 크기가 약간 크게 계산된 것을 확인하였다. 이는 와점성 계수 및 Friction factor f 가 정확한 값이 지정되지 않았기 때문이다. 하상전단응력은 $\tau_b = \rho U_d^2 f/8$ 의 식을 통하여 구하였고, 계산결과는 그림1의 (b)와 같다.

또한 한강에 해석해를 이용하여 유속과 하상전단응력을 계산하였다. 한강의 주흐름방향 경사는 $S_x = 1.75 \times 10^{-4}$ 이다. 수심은 $13.93m$, 무차원 와점성계수는 $\lambda = 0.16$ 을 사용하였으며, Manning's 조도계수 값은 $n = 0.03$ 값을 사용하였다. 그림 2는 한강의 단면에서 유속의 분포와 하상전단응력의 분포를 해석해와 수치해를 비교한 것이다. 모의결과 수치해와 해석해는 대체로 일치하는 경향을 보인다. 수치해의 경우 유한차분법을 이용하여 수렴할 때까지 반복 계산하므로 수학적으로 유도된 해석해를 통해 구한 결과와 미세한 차이가 발생하였다. 또한 해석해의 경우 식 (12)의 가정으로 인하여 좌안과 우안으로부터 각각 $0.1m$

떨어진 구간에서는 0.1m/s가 나오도록 지정해주었으므로 수치해에서는 나오지 않는 결과가 나오게 되었다.

4. 결론

본 연구에서는 유량 횡분배법의 해석해를 이용하여 복단면에 적용하여 적용성을 검증하고 이를 실제하천에 적용하여 수치해와 비교해 보았다. 모의결과 복단면 수로의 해석해와 측정치는 대체로 일치하였으며, 한강의 경우 수치해와 해석해를 비교해 보았을 때 거의 일치하는 결과를 확인하였다. 모의결과 해석해도 임의 단면에 적용이 가능하며 그 결과 값 또한 충분히 정량적임을 확인하였다.

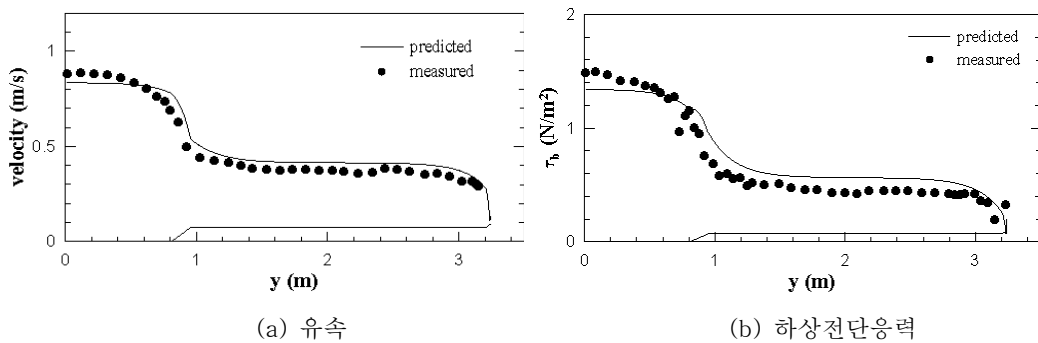


그림 1. 복단면 모의결과

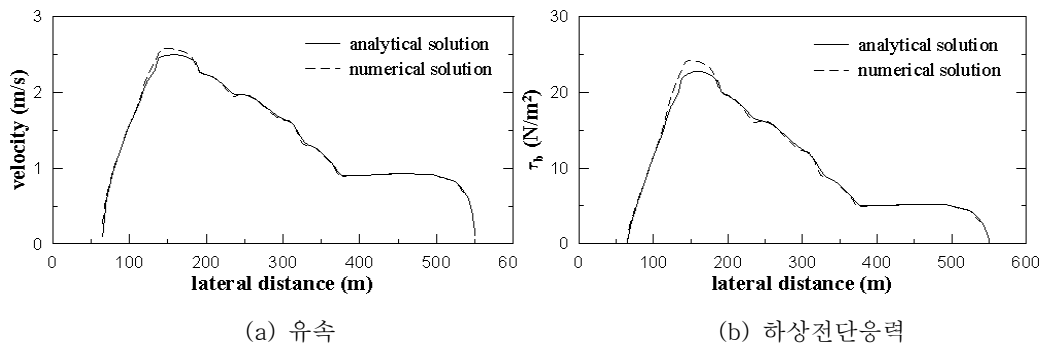


그림 2. 한강 모의결과

감사의 글

본 연구는 국토해양부 건설기술혁신사업인 “하천에서 유사이동 및 하상변동 예측을 위한 3차원 수치모형의 개발(11기술혁신C04)”의 연구비 지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

- 이진휘 (2012). “유량 횡분배법을 이용한 식생하천 흐름 모의.” 석사학위 논문, 연세대학교 토목공학과.
- Shiono, K and Knight, D.W. (1991). Turbulent open-channel flows with variable depth across the channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 222, 617-646
- Weber, J.F. and Menendez, A.N (2004). Performance of lateral velocity distribution models for compound channel sections. *River Flow 2004, Proc., Int. Conf. on Fluvial Hydraulics*, Vol. I, Balkema, Rotterdam, The Netherlands, 449-457.